



Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2017/2018
Prof. Dr. C. Burstedde
J. Holke



Übungsblatt 7.

Abgabe am **Dienstag, 05.12.2017.**

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich mit der veränderten Vorschrift $q^{(k)} \leftarrow \gamma_k q^{(k)}$, mit beliebigen Skalaren $\gamma_k \neq 0$, die Iterierten $x^{(k)}$ und $r^{(k)}$ des CG-Verfahrens nicht ändern.

Bemerkung: In der Praxis findet man oft $\gamma_0 = -1$, $\gamma_k = 1$, weil damit die Formeln für $q^{(0)}$ und $q^{(k)}$ ähnlicher werden. Führt dies auch zu $\beta_0 > 0$ (vergleiche Blatt 6, Aufgabe 1), oder wie könnte man das sonst erreichen?

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Für zwei symmetrisch positiv definite $n \times n$ Matrizen A und C gelte, dass alle Eigenwerte des verallgemeinerten Eigenwertproblems

$$Ax = \lambda Cx \tag{1}$$

im Intervall $[\lambda_1, \lambda_n]$ liegen. Zeigen Sie, dass

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : \lambda_1 \langle Cv, v \rangle \leq \langle Av, v \rangle \leq \lambda_n \langle Cv, v \rangle. \tag{2}$$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Es sei $h = \frac{1}{3}$. Wenden Sie das PCG-Verfahren auf das Gleichungssystem

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

an. Verwenden Sie für C die Diagonalmatrix $C = \frac{1}{h^2} \mathbb{1}$.

Programmieraufgabe 1. (5 + 5 = 10 Punkte)

Implementieren Sie das PCG-Verfahren zum Lösen eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit s.p.d. Matrix A . Geben Sie in jedem Schritt den Wert $\beta_k = \frac{\langle w^{(k+1)}, r^{(k+1)} \rangle}{\langle w^{(k)}, r^{(k)} \rangle}$ aus. Der Algorithmus soll stoppen, wenn $\frac{\langle w^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle w^{(0)}, r^{(0)} \rangle} < 10^{-8}$ oder falls vorher eine als Parameter übergebene Zahl n an Iterationsschritten erreicht wurde.

- Lösen sie die beiden Matrix-Vektor Gleichungssysteme von Zettel 5 mit der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ als Vorkonditionierer.
- Lösen Sie das Gleichungssystem aus Aufgabe 3 mit der dort gegebenen Matrix C als Vorkonditionierer.

Die Bearbeitung erfolgt in Zweiergruppen.
Abgabe Montag 11.12.17 oder Dienstag 12.12.17 im CIP-Pool Wegelerstrasse.
Bitte tragen Sie sich rechtzeitig im CIP-Pool Wegelerstrasse in die Abgabeliste für diese Vorlesung ein.