



# Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2017/2018  
Prof. Dr. C. Burstedde  
J. Holke



## Übungsblatt 14.

Abgabe am (**gar nicht**).

**Aufgabe 1.** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch positiv definit mit maximalem Eigenwert  $\lambda_1 = 9$  und minimalem Eigenwert  $\lambda_n = 4$ .

- Wie viele Schritten benötigt das CG-Verfahren zur Lösung von  $Ax = b$  höchstens, um den Startfehler um einen Faktor  $10^3$  zu reduzieren?
- Nach höchstens wie vielen Schritten findet das CG-Verfahren bei exakter Arithmetik die Lösung  $x^*$ ?
- Was ist ein Krylovraum?
- Zeigen Sie aus dem Algorithmus, dass die Suchrichtungen im CG-Verfahren einer 3-Term Rekursion genügen.

**Aufgabe 2.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

- Geben Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin eine möglichst kleine Menge an, welche die Eigenwerte von  $A$  enthält.
- Sie wollen den betragsgrößten Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor ermitteln. Welches Verfahren wählen Sie hierfür und wie lautet der Algorithmus?

**Aufgabe 3.** a) Berechnen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 30 & -21 \\ 17 & 10 & -22 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

b) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Nutzen Sie eine Singulärwertzerlegung von  $A$ , um  $x \in \mathbb{R}^2$  zu bestimmen, so dass  $\|Ax - b\|_2$  minimal ist. Ist  $x$  eindeutig? Welche weiteren Methoden gibt es, um  $x$  zu bestimmen?

- Es sei  $A = U\Sigma V^T$  ein Singulärwertzerlegung von  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von  $U$  Eigenvektoren von  $AA^T$  sind.

**Aufgabe 4.** Begründen Sie Ihre Antworten auf folgende Fragen.

- a) Wie groß ist der Aufwand einer effizienten Anwendung (also unter Beachtung der bekannten Besetzungsstruktur) einer Givens Rotation?
- b) Welche Zeilen/Spalten einer Matrix  $A$  ändern sich bei Anwendung einer Givens-Rotation  $G[i, j, cs]$  von links bzw. rechts?
- c) Welcher Aufwand ergibt sich damit für die QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen einer vollbesetzten Matrix?
- d) Welcher Aufwand ergibt sich damit für die QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen einer Matrix in oberer Hessenbergform?
- e) Gegeben sei zu einem  $v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$  eine Householder-Spiegelung  $P = I - 2vv^T$ , die auf einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  angewandt wird. Wie groß ist der Speicherbedarf und algorithmische Aufwand (Anzahl reeller Multiplikationen) für eine effiziente Speicherung und Anwendung von  $P$ . Geben Sie dafür einen Algorithmus an (dh, die Klammerung der Rechenschritte).
- f) Welcher Aufwand ergibt sich damit für die QR-Zerlegung mit Householder-Spiegelungen einer vollbesetzten Matrix?
- g) Welcher Aufwand ergibt sich damit für die QR-Zerlegung mit Householder-Spiegelungen einer Matrix in oberer Hessenbergform?