



Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2017/2018
Prof. Dr. C. Burstedde
J. Holke



Übungsblatt 13.

Abgabe am **Dienstag, 30.01.2018.**

Aufgabe 1. Es sei

$$Q_n^{3D}(f) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n f(x_i, x_j, x_k) \mathbf{w}_i \mathbf{w}_j \mathbf{w}_k \quad (1)$$

die 3D Gauß-Legendre-Quadratur zur Approximation von

$$\mathcal{I}(f) = \int_{[-1,1]^3} f(x) dx. \quad (2)$$

Zeige Sie, dass

$$|Q_n^{3D}(f) - \mathcal{I}(f)| \leq 6 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} (4en)^{-2n} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})) C(f) \quad (3)$$

mit

$$C(f) = \max_{(x,y,z) \in [-1,1]^3} \max \left\{ \left| \frac{\partial^{2n+2}}{\partial x^{2n+2}} f(x, y, z) \right|, \left| \frac{\partial^{2n+2}}{\partial y^{2n+2}} f(x, y, z) \right|, \left| \frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+2}} f(x, y, z) \right| \right\}. \quad (4)$$

Aufgabe 2. Es seien $a \leq x_0 < \dots < x_i < \dots < x_n \leq b$. Ferner sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar und es sei g ein Polynom n -ten Grades mit

$$f(x_i) = g(x_i), \text{ für alle } 0 \leq i \leq n. \quad (5)$$

Zeigen Sie folgende Aussage über den Approximationsfehler: Für jedes $x \in [a, b]$ existiert ein $\xi \in [a, b]$, so dass

$$f(x) - g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (6)$$

Aufgabe 3. Wir betrachten folgende Quadraturvorschrift zur Approximation des Integrals

$$\int_0^1 f dx \quad (8)$$

einer Funktion $f \in C_1([0, 1])$:

$$Q(f) = \omega_0 f(0) + \omega_1 f'(0) + \omega_2 f(1) + \omega_3 f'(1). \quad (9)$$

- Bestimme die Gewichte ω_i , so dass $I(f)$ exakt ist für Polynome von Grad 3.
- Wie transformieren sich die Gewichte aus Teil a), wenn wir statt $[0, 1]$ das Intervall $[a, b]$ verwenden?

Aufgabe 4. a) Zeigen Sie, dass

$$L_n := \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \quad (10)$$

ein Polynom n -ten Grades ist. Diese Polynome heißen Laguerre-Polynome.

b) Zeigen Sie, dass die Laguerre-Polynome orthogonal sind bezüglich

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty e^{-x} f(x) g(x) dx. \quad (11)$$

c) Zeigen Sie, dass die Laguerre-Polynome die folgende Rekursion erfüllen:

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x). \quad (12)$$