Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2017/2018
Prof. Dr. C. Burstedde
J. Holke

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 11.

Abgabe am **Dienstag, 15.01.2018**.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Tschebyscheffpolynome

$$p_i(x) = \cos((i+1)\arccos(x)), \tag{1}$$

$i \geq 0$, orthogonal sind bezüglich

$$\langle f, g\rangle_\omega = \int_{-1}^{1} \omega(x) f(x) g(x)\, dx, \tag{2}$$

mit $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Berechnen Sie für $n > 0$ die Nullstellen x_i von p_{n+1}, sowie die entsprechenden Gewichte der Gaußquadratur, $\omega_i = \Lambda_{n+1}(x_i)$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass es keine Quadraturformel der Form

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) \tag{3}$$

mit Stützstellen x_i und Gewichten ω_i zur Bestimmung von

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx \tag{4}$$

gibt, welche exakt ist für alle Polynome von Grad $2n+2$.

Aufgabe 3. $(8 + 2 = 10$ Punkte)

a) Sei eine Quadraturformel $Q[f; a, w, x]$ durch

$$\int_a^b w(x)f(x)\, dx \approx Q[f] := \sum_{k=0}^{m-1} a_k f(y_k) + \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

gegeben, wobei nur die y_k, $k = 0, \ldots, m-1$ bereits fixiert sind.

Sei $r(x) = (x - y_0)(x - y_1) \cdots (x - y_{m-1})$ sowie $s(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

Zeigen Sie: $Q[f; a, w, x]$ ist dann und nur dann exakt für alle Polynome $p \in \mathcal{P}_{m+2n+1}$, wenn gilt

1. $Q[f; a, w, x]$ ist exakt für $p \in \mathcal{P}_{m+n}$ und
2. $\int_a^b w(x)r(x)s(x)p(x)\, dx = 0$ für alle $p \in \mathcal{P}_n$.

b) Benutzen Sie einen Spezialfall von Teil a), um Satz 4.3 aus der Vorlesung zu zeigen.

Programmieraufgabe 1. (10 Punkte) Diese Aufgabe läuft darauf hinaus, die Gaußquadratur auf die bisherigen Integrationsprobleme anzuwenden. Hierfür müssen die Stützstellen x_i und die Gewichte ω_i berechnet werden.

a) Installieren Sie die LAPACK[1] Bibliothek. Auf den Arbeitsplatzrechnern im CIP-Pool ist LAPACK bereits installiert und kann mit `-llapack -lblas` im Compilierbefehl gelinkt werden.

b) Die Legendrepolynome $\{p_i\}$ als Orthogonalpolynome bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g\rangle_0 = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx \tag{5}$$

erfüllen

$$p_{i+1}(x) = (x - \alpha_i)p_i(x) - \beta_i^2 p_{i-1}(x) \tag{6}$$

mit $\alpha_i = 0, \beta_i = \frac{i}{\sqrt{4i^2-1}}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte x_i und Eigenvektoren $\hat{v}_i$ der Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \\ & & \ddots & \beta_n \\ & & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}, \tag{7}$$

sowie die zugehörigen Gewichte ω_i.

Nutzen Sie hierzu die Funktion `dsteqr`[2] aus LAPACK, welche den QR Algorithmus auf Tridiagonalmatrizen anwendet. Um die in FORTRAN implementierte Routine von C aus aufzurufen, muss vor dem Aufruf die Deklaration

```
void dsteqr_ (char *COMPZ, int *N, double *D,
              double *E, double *Z, int *LDZ,
              double *WORK, int *INFO);
```

erfolgen und die Funktion mit `dsteqr_` aufgerufen werden. **Achtung:** alle Argumente werden hierbei zu Pointern; das Array Z sollte von Länge $(n+1)^2$ sein und die Parameter `N` und `LDZ` sollten entsprechend auf einen Integer mit Wert $n+1$ zeigen. `COMPZ` sollte auf `'I'` zeigen und `INFO` auf einen Integer mit Wert 0.

Hinweis: Es gilt $\omega_i = 2v_{i,1}^2$, wobei $v_{i,1}$ der erste Eintrag des normierten Vektors v_i ist.

c) Für die Gaußquadratur von

$$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{2\pi} f(x)g(x)\, dx \tag{8}$$

müssen die x_i und ω_i noch auf das entsprechende Intervall transformiert werden durch

$$\hat{x}_i = \pi x_i + \pi, \qquad \hat{\omega}_i = \pi\omega_i. \tag{9}$$

Implementieren Sie nun eine Gaußquadratur für die Bestimmung von $\langle f, g\rangle$ mit Stützpunkten $\hat{x}_i$ und Gewichten $\hat{\omega}_i$. Berechnen Sie hiermit die Vektoren $\underline{f}$ und $\underline{\hat{f}}$ von Zettel 1 und Zettel 5 für $n = 0, \ldots, 4$ (also bis Polynomgrad 9). Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit den Berechnungen aus den vorherigen Programmieraufgaben.

Die Bearbeitung erfolgt in Zweiergruppen.
Abgabe Montag 21.01.18 oder Dienstag 22.01.18 im CIP-Pool Wegelerstrasse.
Bitte tragen Sie sich rechtzeitig im CIP-Pool Wegelerstrasse in die Abgabeliste für diese Vorlesung ein.

[1] `http://www.netlib.org/lapack/`
[2] https://tinyurl.com/y7g3deyh